Soru: $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$ fonksiyonunun

$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} - \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -x \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Soru: $f(x,y,z) = \frac{y}{z} \cdot \ln\frac{z}{x}$ fonksiyonunun $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{z}}{\cancel{x}}} \cdot \frac{-\cancel{z}}{x^{\cancel{2}}} = -\frac{y}{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z} \cdot \ln\frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} \cdot \ln\frac{z}{x} + \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{\frac{z}{\cancel{x}}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = -\frac{y}{z^2} \cdot \ln\frac{z}{x} + \frac{y}{z^2}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = -\cancel{\frac{y}{z}} + \cancel{\frac{y}{z} \ln\frac{z}{x}} - \cancel{\frac{y}{z} \ln\frac{z}{x}} + \cancel{\frac{y}{z}} = 0$$

Soru: $f(x,y,z) = (\sec xy) \cdot (\arcsin xz)$ fonksiyonunun

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\tan(xy) \cdot \sec(xy) \cdot y\right) \cdot (\arcsin xz) + (\sec xy) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(xz)^2}} \cdot z$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = (xy)(\tan xy)(\sec xy) \cdot (\arcsin xz) + (xz)(\sec xy) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(xz)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\tan xy) \cdot (\sec xy) \cdot x \cdot (\arcsin xz)$$

$$-y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -(xy) \cdot (\tan xy)(\sec xy)(\arcsin xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (\sec xy) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(xz)^2}} \cdot x$$

$$-z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = -(xz) \cdot \sec(xy) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(xz)^2}}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Problem: $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$ ve $g(x,y) = \sin\dfrac{x}{y} \cdot \cos\dfrac{y}{x}$

fonksiyonlarının tanım kümesini bulunuz. Ayrıca tanım kümesi üzerinde diferansiyellenebilir olup olmadıklarını belirleyiniz.

Çözüm: f fonksiyonu $x \neq y$ iken tanımlıdır.

Yani $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ dir.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x+y)^2+(x-y)^2}, \ D_f \text{ de sürekli}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x+y)^2+(x-y)^2}, \ D_f \text{ de sürekli}$$

O halde f fonksiyonu tanım kümesi üzerinde diferansiyellenebilirdir.

---

g fonksiyonu $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ iken tanımlıdır.

Yani $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\} = \mathbb{R}-\{0\} \times \mathbb{R}-\{0\}$

$$g_x = \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \cos\frac{y}{x} + \sin\frac{x}{y} \cdot \left(-\sin\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$g_x = \frac{1}{y} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \cdot \sin\frac{x}{y} \cdot \sin\frac{y}{x}$$

g_x, D_g üzerinde süreklidir.

$$g_y = \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} \cdot \cos\frac{y}{x} + \sin\frac{x}{y} \cdot -\sin\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$g_y = -\frac{x}{y^2} \cos\frac{x}{y} \cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin\frac{x}{y} \sin\frac{y}{x}$$

g_y, D_g üzerinde süreklidir.

Dolayısıyla g fonksiyonu tanım kümesi üzerinde diferansiyellenebilirdir.

Problem: $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ olarak tanımlanan $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $f(x,y)-f(0,0)=\sqrt{|xy|}-0 = 0+\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}$

$$=\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lin. dön.}}}{0}+\underbrace{\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{r(x,y)}\,\|(x,y)-(0,0)\|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \text{ mı?}$$

$y=x$ için

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{2}\,|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

Problem: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}, & 0<\|(x,y)\|<\pi\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

olarak tanımlanan $f: B_\pi(0)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $f(x,y)-f(0,0)=\dfrac{x^2+y^2}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}-0 = 0+\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$=0+\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}}_{r(x,y)}\cdot\|(x,y)-(0,0)\|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1\neq 0.$$

$\sqrt{x^2+y^2}=u$

$u\to 0$

UYGULAMA

1) $f(x,y,z)= xyz + x^2+y^2$ fonksiyonu ve $P=(0,0,0)$, $Q=(1,1,1)$ noktaları verilsin. Ortalama değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

Çözüm: Aranan c noktası

$$c=(1-t_0)P+t_0Q = (1-t_0)(0,0,0)+t_0(1,1,1)=(t_0,t_0,t_0)$$

bulunur. Yine

$$(f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)) = (yz+2x,\ xz+2y,\ xy)$$

olup,

$$(f_x(c),\ f_y(c),\ f_z(c)) = (t_0^2+2t_0,\ t_0^2+2t_0,\ t_0^2)$$

olur. Böylece ortalama değer teoreminden

$$f(1,1,1)-f(0,0,0) = (f_x(c),\ f_y(c),\ f_z(c)).((1,1,1)-(0,0,0)),$$

bu eşitlikten de

$$3-0 = t_0^2+2t_0+t_0^2+2t_0+t_0^2$$

$$3 = 3t_0^2+4t_0$$

olup $t_0 = \frac{-2\mp\sqrt{13}}{3}$ bulunur. $\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\in(0,1)$ olduğundan

$t_0 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ olur. O halde $c=\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3},\ \frac{-2+\sqrt{13}}{3},\ \frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$

elde edilir.

ÖDEV

2) $f(x,y) = x^2+2xy-2y^2-4x$ fonksiyonu ve $P=(-1,2)$, $Q=(2,3)$ noktaları verilsin. Ortalama değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

Çözüm: Aranan c noktası

$$c = (1-t_0)P + t_0 Q = (1-t_0)(-1,2) + t_0(2,3) = (-1+3t_0, 2+t_0)$$

olup, ortalama değer teoreminden dolayı

$$f(Q) - f(P) = Df(c) \cdot (Q-P)$$

yazılır. Yine

$$f_x(x,y) = 2x+2y-4 \quad \text{ve} \quad f_y(x,y) = 2x-4y$$

olup, $x=-1+3t_0$ ve $y=2+t_0$ yazılırsa

$$f_x(c) = -2+8t_0 \quad \text{ve} \quad f_y(c) = 2t_0-10$$

bulunur. Böylece

$$f((2,3)) - f((-1,2)) = (f_x(c), f_y(c)) \cdot ((2,3)-(-1,2))$$

ve

$$-10-(-7) = (-2+8t_0, 2t_0-10) \cdot (3,1)$$

olup $t_0 = \frac{1}{2}$ bulunur. O halde $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ dir.

Soru: $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$ ve $g(x,y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$ ise $(1,\sqrt{5})$ noktasındaki gradyenleri f ve g fonksiyonlarının dik midir? Gösteriniz.

Çözüm: $f_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y}$ $\qquad f_x(1,\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{-x}{y^2} \qquad f_y(1,\sqrt{5}) = -\frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$g_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy-(-y).(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$g_x(1,\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$$

$$g_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy-(-x).(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$g_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}$$

$$g_y(1,\sqrt{5}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{grad } f(1,\sqrt{5}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$\text{grad } g(1,\sqrt{5}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{10}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \right\rangle = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{60} \neq 0$$

olduğundan gradyenleri dik değildir

Soru: $u = e^{x^2+y^2+z}$, $x = \cos(s+t)$, $y = \sin(s+t)$, $z = st-1$

için $\dfrac{\partial u}{\partial s} = ?$ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = ?$

Çözüm:

$$u \begin{cases} x < \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \\ y < \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \\ z < \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{x^2+y^2+z} \cdot 2x \cdot (-\sin(s+t)) + e^{x^2+y^2+z} \, 2y \cdot \cos(s+t) + e^{x^2+y^2+z} \cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{x^2+y^2+z} \left(-2x \sin(s+t) + 2y \cos(s+t) + t\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{1+st-1} \left(\cancel{-2 \cdot \cos(s+t) \cdot \sin(s+t)} + \cancel{2 \cdot \sin(s+t) \cdot \cos(s+t)} + t\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{st} \cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{x^2+y^2+z} \cdot 2x \cdot (-\sin(s+t)) + e^{x^2+y^2+z} \cdot 2y \cdot \cos(s+t) + e^{x^2+y^2+z} \cdot s$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{x^2+y^2+z} \left(-2x \sin(s+t) + 2y \cos(s+t) + s\right)$$

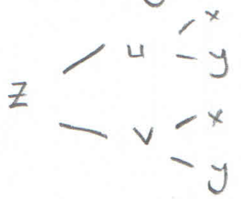
$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{st} \left(\cancel{-2 \cdot \cos(s+t) \cdot \sin(s+t)} + \cancel{2 \sin(s+t) \cos(s+t)} + s\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{st} \cdot s$$

Soru: $z = f(e^{x+y}) + g(\ln(x+y))$ seklindeki herhangi bir fonksiyonun $z_x - z_y = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz

Çözüm: $e^{x+y} = u$

$\ln(x+y) = v$



$z = f(u) + g(v)$

$z_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x$

$z_x = f_u \cdot e^{x+y} + f_v \cdot \dfrac{1}{x+y}$

$z_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y$

$z_y = f_u \cdot e^{x+y} + f_v \cdot \dfrac{1}{x+y}$

$z_x = z_y$ olduğundan $z_x - z_y = 0$ dır.

8) $u = f_1(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x}$ ve $v = f_2(x,y) = \sin x + \cos y$ denklemleri ile tanımlanan $f=(f_1,f_2)$ dönüşümünün tanım kümesini belirtiniz. $f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = (u_0,v_0)$ noktası civarında f nin tersi var mıdır? $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ ve $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Göz.

Çözüm: $D_f = D_{(f_1,f_2)} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ kümesi f dönüşümünün tanım kümesidir.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 - \frac{y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix}$$

$$= -\left(3x^2 - \frac{y^4}{x^2}\right)\cdot \sin y - \frac{4y^3}{x}\cdot \cos x$$

$$= \left(\frac{y^4}{x^2} - 3x^2\right)\sin y - \frac{4y^3}{x}\cos x$$

$P_0 = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ için

$$J_{P_0} = J_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \left(\frac{\pi^4}{16}\cdot\frac{4}{\pi^2} - 3\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2} - 4\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\frac{\pi}{2}}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{4}\pi^2 = -\frac{1}{2}\pi^2 \neq 0$$

olduğundan f in (u_0,v_0) noktası civarında tersi vardır.

$J_{f^{-1}} = \dfrac{1}{J_f}$ olduğundan $J_{f^{-1}}(P_0) = -\dfrac{2}{\pi^2}$ dir.

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{P_0} = \frac{1}{J_f}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} = -\frac{2}{\pi^2}\cdot(-\sin y)\Big|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi^2}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{P_0} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\left.\frac{4y^3}{x}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi^2}\cdot 4\cdot\frac{\pi^2}{4} = 2$$

UYGULAMA

ÖDEV ✓

1-) $F(x,y)=x^2+3xy^2+y^3-2=0$ denklemi ile kapalı olarak tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonunun $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $F_x = 2x+3y^2$

$F_y = 6xy+3y^2$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x+3y^2}{6xy+3y^2}$ şeklindedir.

2-) $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-3=0$ denkleminin $(1,0,1)$ noktası civarında $z=f(x,y)$ fonksiyonunu kapalı olarak tanımladığını gösteriniz ve z_x, z_y, z_{xx} ve z_{xy} türevlerini bulunuz.

Çözüm: $F(1,0,1) = 2+0+1-3=0$

F in $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ için birinci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olduğundan $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$ dür.

$F_y(x,y,z)=2y$, $F_y(1,0,1)=0$

$F_x(x,y,z)=4x$, $F_x(1,0,1)=4\neq 0$

$F_z(x,y,z)=2z$, $F_z(1,0,1)=2\neq 0$

O halde $z=f(x,y)$ şeklinde bir tek kapalı f fonksiyonu tanımlanabilir. Ayrıca $z_x=-\frac{F_x}{F_z}$ ve $z_y=-\frac{F_y}{F_z}$ eşitlikleri vardır.

$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{4x}{2z} = -2\frac{x}{z} \Rightarrow z_x(1,0,1) = -2$

$+2x \cdot -2 \cdot \frac{x}{z}$

$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \Rightarrow z_y(1,0,1)=0$

$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{z}\right) = \frac{-2\cdot z - z_x\cdot(-2x)}{z^2} = \frac{-2z-4\frac{x^2}{z}}{z^2}$

$z_{xx}(1,0,1) = -2-4=-6$

$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{z}\right) = -2x\cdot\frac{-1}{z^2}\cdot z_y = \frac{2x}{z^2}\cdot\frac{-y}{z} = -\frac{2xy}{z^3}$

$z_{xy}(1,0,1) = 0$

ÖDEV **3)** $F(x,y,z) = xy^2z + xy - x + 2z = 0$ denklemi veriliyor. $(0,0,0)$ noktası civarında z nin x, y ye göre çözülebileceğini gösteriniz ve bu çözümü bulunuz. Böylece z_x ve z_y kısmî türevlerini doğrudan hesaplayarak bulunuz. Bulduğunuz türevleri kapalı olarak türev alma yöntemi ile doğrulayınız.

Çözüm: $F(0,0,0) = 0$

F in $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için birinci mertebeden kısmî türevleri var ve sürekli olduğundan $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ dür.

$F_x(x,y,z) = y^2z + y - 1 \Rightarrow F_x(0,0,0) = -1$

$F_y(x,y,z) = 2xyz + x \Rightarrow F_y(0,0,0) = 0$

$F_z(x,y,z) = xy^2 + 2 \Rightarrow F_z(0,0,0) = 2 \neq 0$

O halde $z = f(x,y)$ şeklinde bir tek kapalı fonksiyon tanımlanabilir.

$$xy^2z + xy - x + 2z = 0 \Rightarrow (xy^2+2)z = x - xy$$

$$\Rightarrow z = \frac{x - xy}{xy^2+2}$$

$$z_x = \frac{(1-y)(xy^2+2) - y^2(x-xy)}{(xy^2+2)^2} = \frac{\cancel{xy^2} + 2 - \cancel{xy^3} - 2y - \cancel{xy^2} + \cancel{xy^3}}{(xy^2+2)^2} = \frac{2-2y}{(xy^2+2)^2}$$

$$z_y = \frac{-x.(xy^2+2) - 2xy.(x-xy)}{(xy^2+2)^2} = \frac{-x^2y^2 - 2x - 2x^2y + 2x^2y^2}{(xy^2+2)^2} = \frac{x^2y^2 - 2x^2y - 2x}{(xy^2+2)^2}$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{y^2z + y - 1}{xy^2+2} = \frac{1 - y - y^2.\frac{x-xy}{xy^2+2}}{xy^2+2}$$

$$= \frac{\cancel{xy^2} + 2 - \cancel{xy^3} - 2y - \cancel{xy^2} + \cancel{xy^3}}{(xy^2+2)^2} = \frac{2-2y}{(xy^2+2)^2} \quad //$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2xyz + x}{xy^2+2} = -\frac{2xy.\frac{x-xy}{xy^2+2} + x}{xy^2+2}$$

$$= -\frac{2x^2y - 2x^2y^2 + x^2y^2 + 2x}{(xy^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^2y^2 - 2x^2y - 2x}{(xy^2+2)^2} \quad //$$

$u_0 \quad v_0 \quad x_0 \quad y_0$

1) $\left.\begin{aligned} F &= u^2+v^2-x^2-y^2=0 \\ G &= u+v-x^2-y=0 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi $P_0=(2,1,1,2)$ noktasının bir komşuluğunda x ve y cinsinden u ve v için tek olarak çözülebilir mi?

$F(P_0) = 4+1-1-4=0$

$G(P_0) = 3-1-2=0$

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2u-2v$$

$$J(2,1,1,2) = 2.2-2.1 = 2 \neq 0.$$ çözülebilir.

2) $\left.\begin{aligned} F &= xu^2+yv^2-x-y=0 \\ G &= x^2+y^2-u-v=0 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi $P=(1,1,1,1)$ noktasının bir komşuluğunda x ve y cinsinden u ve v için tek olarak çözülebilir mi?

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2xu & 2yv \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2xu+2yv$$

$$J(1,1,1,1) = -2+2=0$$ çözülemez.

Problem: $u(1,1)=1, \quad v(1,1)=1, \quad w(1,1)=-1$ koşullarını

ve $B((1,1),r)$ üzerinde

$$u^5+xv^2-y+w=0 \quad = F(x,y,u,v,w)$$

$$v^5+yu^2-x+w=0 \quad = G(x,y,u,v,w)$$

$$w^4+y^5-x^4-1=0 \quad = H(x,y,u,v,w)$$

denklemlerini sağlayan sürekli dif. bilir $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ fonk. (ve bir $r>0$ sayısının) var old. göst.

$$u_0=1, \quad v_0=1, \quad w_0=-1$$

$$(1,1,1,1,-1)=P_0$$

$$F(1,1,1,1,-1)=0$$

$$G(1,1,1,1,-1)=0$$

$$H(1,1,1,1,-1)=0$$

$$J=\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5u^4 & 2xv & 1 \\ 2yu & 5v^4 & 1 \\ 0 & 0 & 4w^3 \end{vmatrix}.$$

$$J(P_0)=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4(25-4) \neq 0$$

O halde F, G ve H, u, v, ve w'ya göre çözülebilirdir. ((1,1)'in civarında)

(x,y,u,v,w)

$(1,1,1,1,-1)$

3) φ türevlenebilir iki değişkenli bir fonksiyon ve $f(s,t)=\varphi\left(\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right)$ ise f nin $s\cdot\frac{\partial f}{\partial s}+t\cdot\frac{\partial f}{\partial t}=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\frac{s}{t}=u \qquad \frac{t}{s}=v$$

$$f(s,t)=\varphi(u,v)$$

$$f_s=\varphi_u\cdot\frac{1}{t}+\varphi_v\cdot\frac{-t}{s^2}$$

$$f_t=\varphi_u\cdot\frac{-s}{t^2}+\varphi_v\cdot\frac{1}{s}$$

$$s\cdot f_s+t\cdot f_t=\frac{s}{t}\varphi_u-\frac{st}{s^2}\varphi_v-\frac{st}{t^2}\varphi_u+\frac{t}{s}\varphi_v$$

$$=\frac{s}{t}\varphi_u-\frac{t}{s}\varphi_v-\frac{s}{t}\varphi_u+\frac{t}{s}\varphi_v$$

$$=0$$